İstanbul Atatürk Fen Lisesi Matematik Olimpiyatı Takımı

Leva Matematik Kampı
Bitirme Sınavı

Birinci Gün
23 Eylül 2023

Problem 1. ABC üçgeninin O merkezli çevrel çemberinin üzerinde bir X noktası vardır. BX doğrusunun üzerinde $|AD| = |BD|$ olacak şekilde X'ten farklı bir D noktası vardır. CX doğrusunun üzerinde $|AE| = |CE|$ olacak şekilde X'ten farklı bir E noktası vardır. Buna göre, DEX üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin AO doğru parçasının orta dikmesi üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Problem 2. Levent'in evindeki tahtada 1'den büyük bir tam sayı yer almaktadır. Levent, her sabah uyandığında tahtada yazan n sayısını silmekte ve $m^3 = n$ koşulunu sağlayan bir pozitif m tam sayısı varsa tahtaya m yazmakta, aksi takdirde $2n + 1$ yazmaktadır. Levent ezeli ve ebedi bir varlık olduğuna göre, Levent'in tahtaya yazdığı ve yazacağı tüm sayıların arasından 10^{100}'den büyük olanların sonsuz çoklukta olduğunu gösteriniz.

Problem 3. Her x, y pozitif gerçek sayıları için

$$f(x+y) = \left(\frac{y}{x+y}\right) f(x) + \left(\frac{x}{x+y}\right) f(y)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.