

Leva Matematik Kampı

Bitirme Sınavı

İkinci Gün
24 Eylül 2023

Problem 4. Her a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{(a+2b+2c)(3a+2b+2c)}{(b+c)(2a+b+c)} + \frac{(b+2c+2a)(3b+2c+2a)}{(c+a)(2b+c+a)} + \frac{(c+2a+2b)(3c+2a+2b)}{(a+b)(2c+a+b)} \geq \frac{105}{8}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 5. Emre ile Başar, $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere, tahtaya düzgün bir n -gen çiziyor ve ardından bir oyun oynamaya başlıyorlar. Emre'nin başladığı ve sırayla hamle yaptıkları bu oyuna iki oyuncu da 0 puan ile başlıyor. Sırası gelen oyuncu, tahtadaki çokgenin daha önce boyanmamış bir köşesini boyuyor. Bu hamlenin sonucunda, boyadığı köşenin o an hâlihazırda boyanmış olan komşu köşelerinin sayısı (0, 1 ya da 2) kadar puan kazanıyor. Boyanacak köşe kalmadığında oyun bitiyor ve daha yüksek puana sahip olan oyuncu oyunu kazanıyor. Eşitlik durumunda oyunun sonucu beraberlik oluyor. Buna göre n sayısının hangi değerlerinde Emre, hangi değerlerinde Başar bu oyunu kazanmayı garantileyebilir?

Problem 6. Levent; bir n pozitif tam sayısı ile karşılaştığı zaman öyle bir k pozitif tam sayısı bulmak istiyor ki, $n = d_1 d_2 \cdots d_k$ eşitliğini ve her $i = 1, \dots, k$ için $d_i^2 \mid n + d_i$ olmasını sağlayan $d_1, d_2, \dots, d_k$ pozitif tam sayıları bulunabilsin.

- a) Levent'in amacına ulaşmasını sağlayan n pozitif tam sayıları sonsuz çoklukta mıdır?
b) Levent, 1 haricindeki herhangi bir tam kare ile karşılaştığında amacına ulaşabilir mi?