İstanbul Atatürk Fen Lisesi
LMY - 3
B Bölümü

6 - 13 Şubat 2022

1. a, b, c pozitif tam sayılarının en büyük ortak böleni d'dir. $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{c} + \frac{c+1}{a}$ bir tam sayı olduğuna göre,
$$d^3 \leq ab + bc + ca$$
eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz.

2. c gerçek sayısının hangi değerleri için
$$f(f(x) + y) = f(x - 2) + f(y + 1) + c$$
eşitliğini her x, y gerçek sayıları için sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ örten fonksiyonları bulunur?

3. Emre Amca'nın pastanesinde bir miktar kurabiye vardır. Emre Amca, bu kurabiyeleri sıraya diziyor ve her kurabiyenin üzerine sıra numarasını yazıyor. Sonra da oğlu Başar'dan 1'den büyük iki tam sayı söylemesini ve bunun ardından kurabiyeleri babası ile kendisi arasında paylaştırmasını istiyor. Başar'ın söylediği sayılar a ve b olmak üzere; üzerinde n yazan kurabiye, üzerinde $a \cdot n$ veya $b \cdot n$ yazan kurabiyelerden herhangi biriyle aynı kişiye düşerse Emre Amca kurabiyelerin hepsini alıp pastanesine geri götürüyor. Bu durum gerçekleşmediği takdirde Emre Amca ile Başar paylarına düşen kurabiyeleri yiyorlar. Emre Amca'nın pastanesinde kaç tane kurabiye olursa olsun, Başar'ın kurabiye yemeyi garantileyebilmek için söyleyebileceği tüm tam sayı ikililerini belirleyiniz.

4. ABC bir üçgen olsun. O merkezli bir çember; BC doğrusunu X_1 ile X_2, AC doğrusunu Y_1 ile Y_2 ve AB doğrusunu Z_1 ile Z_2 noktalarında kesiyor. CX_1Y_1 ve BX_1Z_1 üçgenlerinin çevrel çemberleri X_1'den farklı bir P noktasında kesişiyor. Benzer şekilde, CX_2Y_2 ve BX_2Z_2 üçgenlerinin çevrel çemberleri X_2'den farklı bir Q noktasında kesişiyor. $|OP| = |OQ|$ olduğunu gösteriniz.