İstanbul Atatürk Fen Lisesi
LMY-2
B Bölümü

1 - 5 Ekim 2021

1. X, Y, Z üç farklı nokta olmak üzere, önce $[XY]$ doğru parçası üzerinde X'ten Y'ye ve ardından $[YZ]$ doğru parçası üzerinde Y'den Z'ye yürüyen bir karıncanın aldığı yolun orta noktasını $\odot(X, Y, Z)$ şeklinde gösterelim. ABC bir üçgen, $D = \odot(A, B, C)$, $E = \odot(B, C, A)$ ve $F = \odot(C, A, B)$ olmak üzere,

$$\frac{1}{4} < \frac{Alan(DEF)}{Alan(ABC)} \leq 1$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz.

2. Negatif olmayan birkaç tam sayının n. kuvvetlerinin toplamı, bu sayıların ondalık gösterimlerinin yan yana yazılmasıyla elde edilen sayıya eşitse bu sayıya *n-Boshamakos sayısı* adı verilir. Örneğin, $88^2 + 33^2 = 8833$ eşitliği nedeniyle 8833 sayısı bir 2-Boshamakos sayısıdır. Buna göre,
   (a) 2-Boshamakos sayılarının sonsuz çoklukta olduğunu gösteriniz.
   (b) k herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pozitif tam sayıları ve her $r \in \{0, 1, \ldots, 8\}$ için aynı anda hem a_1-Boshamakos, hem a_2-Boshamakos, (...) hem de a_k-Boshamakos sayısı olup 9 ile bölümünden r kalanını veren pozitif tam sayıların sonsuz çoklukta olduğunu gösteriniz.

3. Emre'ye sürpriz yapmak isteyen Başar, pastaneden 2021 m^3 hacminde bir pasta alıyor. Yüzük almak için kuyumcuya gittiğinde ise cebindeki bütün parayı pastaya harcadığını fark ediyor. Bu nedenle kuyumcudan, kendisinden ücret almadan verebileceği en büyük yüzüğü vermesini istiyor. Bu isteğe cevap olarak Kuyumcu Salih, Başar'a noktasal bir yüzük veriyor. Başar, bu yüzüğü pastanın içinde Emre'nin bilmediği bir noktaya yerleştiriyor. Sonra da Emre ile birlikte sırayla pastayı yemeye başlıyorlar. Pasta yeme sırası gelen kişi; pastadan en az 1 cm^3, en fazla 1 m^3 hacminde bir parça koparıp yiyor. (Bu parça pastanın herhangi bir ölçülebilir alt kümesi olabilir.) Bu üst sınır, Emre'nin her pasta yiyişinin ardından 1 cm^3 azalıyor. Başar'ın pasta yemesi ise üst sınırı değiştirmiyor. Pastayı yemeye Emre başladığına göre, Başar'ın Emre'nin pastadaki yüzüğü yiyeceğini garanti edemeyeceğini gösteriniz.

4. P polinomu gerçek katsayılı bir polinom olmak üzere, birbirinden farklı her a, b pozitif tam sayıları için

$$\frac{P(a) - P(b)}{a - b} \in \mathbb{Z}$$

koşulu ve $P(0) = 0$ eşitliği sağlanıyorsa P polinomuna *vefakâr polinom* adı verilir. Buna göre,
   (a) Tam sayı katsayılı olmayan vefakâr polinomların sonsuz çoklukta olduğunu gösteriniz.
   (b) Vefakâr polinomların katsayılarının alabilecekleri tüm değerleri belirleyiniz.