İstanbul Atatürk Fen Lisesi Matematik Olimpiyatı Takımı

Leva Matematik Kampı

Hazır Bulunuşluk Sınavı

İkinci Gün

22 Temmuz 2023

Problem 10. Levent, L noktasını ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde istediği gibi hareket ettirebilmektedir. $|AB| = 6$, $|AC| = 8$ birim ve $\angle BAC = 90^\circ$ olduğuna göre $[AL]$ doğru parçasının hangi uzunluk değerleri için L noktasının konumu kesin olarak bilinebilir?

Problem 11. 11'in pozitif tam sayı katlarının herhangi birinden tam olarak bir hanenin silinmesiyle elde edilebilecek tüm sayıların kümesinin $\mathbb{Z}^+$ olduğunu gösteriniz.

Problem 12. $x^{x^{2023}} = 2023$ denklemini sağlayan tüm x gerçek sayılarını bulunuz.

Problem 13. $|AC| > |AB|$ olan dar açılı bir ABC üçgeni verilmiştir. $[AC]$ doğru parçası üzerinde $|CD| = |AB|$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. AB doğrusuna A noktasında teğet olan ve D noktasından geçen çember, ABC üçgeninin çevrel çemberini A ve E noktalarında kesiyor. $[AD]$ doğru parçasının orta dikmesi ile ABC üçgeninin A noktasından geçen dış açıortayının E noktasında kesiştiğini gösteriniz.

Problem 14. Emre ile Başar, evlerindeki tahtanın üzerinde *Devlerin Aşkı* oyununu oynamaya karar veriyor. Oyunun başlangıcında tahtada 2023 sayısı yer alıyor. Hamle sırası gelen oyuncu, tahtada yazan n pozitif tam sayısını silip yerine $n-1$ veya $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ yazıyor. Tahtaya bir pozitif tam sayı yazması mümkün olmayan kişi oyunu kaybediyor. Oyuna Emre başladığına göre, Emre'nin bu oyunu kazanmayı garantileyebileceğini gösteriniz.

Problem 15. a, b, c, x, y ve z pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} a^2 + b + c &= x^2 - 1 \\ b^2 + c + a &= y^2 - 1 \\ c^2 + a + b &= z^2 - 1 \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm çözümlerini bulunuz.

Problem 16. $|AC| > |AB|$ olan dar açılı bir ABC üçgeni verilmiştir. Bu üçgenin çevrel çemberinin A'yı içeren BC yayının orta noktasına E, içermeyen BC yayının orta noktasına da F diyelim. E noktasından AC doğrusuna indirilen dikmenin ayağı D olsun. ADB üçgeninin çevrel çemberinin $[AF]$ doğru parçasını iki eşit parçaya böldüğünü gösteriniz.

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.

İstanbul Atatürk Fen Lisesi Matematik Olimpiyatı Takımı

Leva Matematik Kampı

Hazır Bulunuşluk Sınavı

İkinci Gün

22 Temmuz 2023

Problem 17. Levent'in evinde bulunan kareli tabloların ilginç bir özelliği vardır: Miladi takvime göre yıl n ise, $n \times n$ boyutlarındaki bir tablonun her hanesi, $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ kümesinin elemanlarından biriyle doldurulduğunda, her $i = 1, \ldots, n$ için i. satır ile i. sütunun birleşimi S kümesinin bütün elemanlarını içeriyorsa tablo tüm eve ışık saçmaya başlıyor. Bu tabloların ışık saçmasının başka bir yolu olmadığı biliniyor.

a) Levent'in 2023 yılında evindeki tablolardan ışık elde edemeyeceğini gösteriniz.

b) Levent'in evindeki tablolardan ışık elde edebileceği yılların sonsuz çoklukta olduğunu gösteriniz.

Problem 18. Her x pozitif gerçek sayısı için

$$f(f(x)) = 14x - 5f(x) + 40$$

eşitliğini sağlayan tüm $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.