İSTANBUL ATATÜRK FEN LİSESİ
MATEMATİK OLİMPİYATI TAKIMI

0. LEVA MATEMATİK YARIŞMASI

26 Mart – 2 Nisan 2021

1. $2^x + 3^y = z^2$ eşitliğini sağlayan bütün (x, y, z) doğal sayı üçlülerini belirleyiniz.

2. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$a_1(1-a_2) + a_2(1-a_3) + a_3(1-a_4) + a_4(1-a_5) + a_5(1-a_6) + a_6(1-a_1) < 3$$

olduğunu gösteriniz.

3. Çevrel çemberinin merkezi O noktası olan bir ABC üçgeninde OC doğrusu, BC kenarına ait yükseklik ile K noktasında kesişmektedir. $[AK]$'nin orta noktası P, $[AC]$'in orta noktası M ve $PO \cap BC = Y$ olsun. BCM üçgeninin çevrel çemberinin AB'yi kestiği nokta X olmak üzere B, X, O, Y noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

4. Bir masada $n \geq m$ doğal sayılar olmak üzere m adet özdeş, kırmızı renkli, içi boş dik silindir ile n adet özdeş, mavi renkli, içi boş dik silindir bulunmaktadır. Kırmızı renkli silindirlerin iç yarıçap uzunluğu, mavi renkli silindirlerin dış yarıçap uzunluğuna eşittir. Ayrıca, masadaki tüm silindirlerin yükseklikleri birbirine eşittir. Emre ile Başar, masadaki mavi silindirleri zemine dik ve yüksekliği yeterli olan bir çubuğun etrafından geçirerek üst üste diziyorlar. Kırmızı silindirleri ise çubuğun etrafındaki mavi silindir sütununun etrafından geçirerek benzer şekilde üst üste diziyorlar. Sonrasında, oluşturdukları düzenek üzerinde Emre'nin başladığı ve sırayla hamle yaptıkları bir oyun oynuyorlar. Her hamlede bir oyuncu bu düzenekten en az bir, en fazla k adet silindir çıkarıyor. Son silindiri yerinden çıkaran oyuncu oyunu kazanıyor.

Bu düzenekte bir silindirin yerinden çıkarılabilmesi için bu silindirin üzerinde başka hiçbir silindirin bulunmaması gerekmektedir. Ayrıca, mavi silindirlerin sayısı kırmızı silindirlerin sayısına eşit olduğu zaman en üstteki silindir, yanındaki kırmızı silindirlerin arasında sıkıştığı için yerinden çıkarılamamaktadır. Bu nedenle, oyunun oynanma süresi boyunca çubuğun etrafındaki kırmızı silindirlerin sayısı hiçbir zaman mavi silindirlerin sayısını aşmamaktadır. Emre ile Başar'ın bu oyunu en iyi şekilde oynadıkları bilindiğine göre, oyunu Emre'nin kazanmasını sağlayan bütün (n, m, k) üçlülerini belirleyiniz.