

LEVA BİLİM TOPLULUĞU
Leva Matematik Kampı
Hazır Bulunuşluk Sınavı

Birinci Gün
19 Temmuz 2025

Problem 1. Emre; kenar uzunlukları $|AB| = 3$, $|AC| = 4$ ve $|BC| = 5$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin üzerindeki bir P noktasını görünmez kalemle işaretlemiştir ve Başar'dan P noktasının nerede olduğunu tahmin etmesini istemiştir. Başar'ın ipucu istemesi üzerine Emre, $|AP|$ uzunluğunun x 'e eşit olduğunu söylemiştir. Başar bu bilgiyi kullanarak P noktasının nerede olduğunu kesinlikle (tek türlü şekilde) bilebilmektedir. Buna göre x reel sayısının alabileceği farklı değerlerin çarpımının 1 olduğunu gösteriniz.

Problem 2. Hangi $p > q > 2$ asal sayıları için $p^2 - q^2$ sayısının asal çarpanlara ayrılışındaki üslerin toplamı 5'ten küçüktür?

Problem 3. x, y reel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} y^2 + x^2y &= xy + 1 \\ y^2 + xy^2 &= xy + \frac{y^3 + 2}{3} \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm çözümlerini bulunuz.

Problem 4. $\mathbb{N}$ ile gösterilen negatif olmayan tam sayılar kümesinin A ve B adında herhangi iki sonlu alt kümesi alındığında, $A \# B$ kümesi şu süreç ile tanımlanıyor:

- Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a + b$ tam sayısı tahtaya yazılır.
- Tahtada birden fazla kopyası bulunan en büyük sayı n olmak üzere, n sayısının tahtadaki iki tane kopyası silinir ve tahtaya bir adet $n + 1$ yazılır.
- Elde edilen yeni tahtada hâlâ birden fazla kopyası bulunan tam sayılar varsa Adım 2 tekrar edilir.
- Elde edilen yeni tahtada her tam sayı en fazla bir kopyaya sahipse, son durumda tahtada yer alan sayıların kümesi $A \# B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanıma göre, herhangi bir sonlu $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi verildiğinde $A \# B = \{0, 1, \dots, n\}$ olacak şekilde bir $B \subseteq \mathbb{N}$ kümesi ve $n \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilmesinin gerek ve yeter şartı $0 \in A$ olmasıdır. İspatlayınız.

Problem 5. Herhangi $a > b > c \geq 0$ reel sayıları verildiğinde

$$\frac{a^2 + bc}{(b - c)^3} + \frac{b^2 + ac}{(a - c)^3} + \frac{c^2 + ab}{(a - b)^3} > \frac{3}{a - b}$$

olduğunu gösteriniz.

LEVA BİLİM TOPLULUĞU
Leva Matematik Kampı
Hazır Bulunuşluk Sınavı

Birinci Gün
19 Temmuz 2025

Problem 6. Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninde AC ile BD doğrularının kesişimi P , AD ile BC doğrularının kesişimi Q noktasıdır. $[AC]$ ve $[BD]$ 'nin orta noktaları sırasıyla X ve Y olsun. ADP ve BCP üçgenlerinin çevrel çemberleri AB 'ye teğettir. PCD ve PXY üçgenlerinin çevrel çember merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere Q, O_1, O_2 noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

Problem 7. m bir pozitif tam sayı olmak üzere, $m = a^2 + b^2 + c^2 = d^2 - 1$ eşitliğini sağlayan bir (a, b, c, d) tam sayı dördlüsü varsa m 'ye bir *Levent sayısı* adı verilir. En küçük n . Levent sayısı a_n şeklinde gösterilmek üzere, hangi n pozitif tam sayıları için $a_n > (n - 1)^4$ koşulu sağlanır?

Problem 8. Emre ve Başar'ın en sevdikleri meşgale olan *Devlerin Aşk* oyunu başlamadan önce tahtaya en fazla 2 farklı asal böleni olan bir $n > 1$ tam sayısı yazılır. Oyun Emre'nin hamle yapmasıyla başlar ve oyuncular sırayla hamle yaparlar.

Tahtada yazan sayının tam olarak 2 farklı asal böleni varsa, hamle sırası gelen oyuncunun yapabileceği tek hamle çeşidi, bu sayıyı asal bölenlerinden birine bölmek ve eski sayıyı silip yeni sayıyı tahtaya yazmaktır.

p bir asal sayı ve a bir pozitif tam sayı olmak üzere, tahtada yazan sayı p^a formundaysa, hamle sırası gelen oyuncunun yapabileceği iki farklı hamle vardır: Yine aynı hamleyi yapabilir ya da a 'nın kendisinden farklı bir b pozitif tam sayı bölenini alıp eski sayının yerine p^b yazabilir.

Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybettiğine göre, hangi n değerleri için Emre bu oyunu kazanmayı garantileyebilir?

Problem 9. Çevrel çemberinin merkezi O , diklik merkezi H olan bir ABC dar açılı üçgeni verilmiştir. AO çaplı çember ile BOC üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kez kesiştiği nokta D , HO doğrusu ile BOC üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kez kesiştiği nokta X olsun. BOC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bulunan bir K noktası $\angle KDH = 90^\circ$ şartını sağlamaktadır. $[BC]$ kenarı üzerinde bulunan bir L noktası $\angle LHB = \angle ABC$ şartını sağlamaktadır. Buna göre KL doğrusu, AOX üçgeninin çevrel çemberi ve ABC üçgeninin çevrel çemberinin aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.