Leva Bilim Topluluğu

Leva Matematik Kampı
Hazır Bulunuşluk Sınavı

Birinci Gün
20 Temmuz 2024

Problem 1. p bir tam sayı olmak üzere; p, $p+6$, $p+12$, ..., $p+6k$ sayılarının hepsi asalsa k en çok kaç olabilir?

Problem 2. Bir üçgenin iç bölgesini eşit alana sahip iki bölgeye ayıran bir doğruya *alanortay* adı verilir. Bu tanıma göre, tüm alanortayları tek noktada kesişen hiçbir üçgen yoktur. Gösteriniz.

Problem 3. k herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, yan yana ya da üst üste konmuş k tane birim kareden oluşan çubuk benzeri şekillere *domino* denir. $n \times m$ boyutlarındaki bir kareli tablo, her domino en fazla bir kez kullanılacak şekilde doldurulacaktır. Hangi (n, m) pozitif tam sayı ikilileri için bu işlem gerçekleştirilebilir? (Dominolar döndürülemez. Başka bir deyişle, $k > 1$ için $1 \times k$ boyutundaki domino ile $k \times 1$ boyutundaki domino birbirinden farklı kabul edilir.)

Problem 4. Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+$ sayıları verildiğinde

$$\underset{k=1}{\overset{n}{\mathbf{K}}}[a_k : b_k] = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

tanımı yapılıyor. Örneğin, $a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 1, b_1 = 5, b_2 = 2, b_3 = 3$ verildiğinde

$$\underset{k=1}{\overset{3}{\mathbf{K}}}[a_k : b_k] = \cfrac{3}{5 + \cfrac{7}{2 + \cfrac{1}{3}}}$$

eşitliği sağlanıyor. Buna göre, $n \in \mathbb{Z}$ ve $a \in \mathbb{R}$ sayıları 1'den büyükse

$$\underset{k=1}{\overset{n}{\mathbf{K}}}[a : (a \cdot b_k)] = \underset{k=1}{\overset{n}{\mathbf{K}}}[1 : b_k]$$

eşitliğinin $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+$ sayılarının alabileceği hiçbir değer için sağlanmadığını gösteriniz.

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.

Leva Bilim Topluluğu

Leva Matematik Kampı
Hazır Bulunuşluk Sınavı

Birinci Gün
20 Temmuz 2024

Problem 5. Fakı ve Kaystegin, dedelerinden miras kalan LMY üçgeni şeklindeki arazinin M köşesinde duruyor ve Y köşesine gitmek istiyorlar. Bu amaçla Fakı doğrudan $[MY]$ doğru parçasını takip ederken Kaystegin ise önce $[ML]$, sonra $[LY]$ doğru parçasını takip ediyor. İkisi de yolculuk esnasında aldıkları toplam yolun üçte birini ve üçte ikisini tamamladıkları noktaları ayrı ayrı işaretliyorlar. Fakı sırayla B ve E, Kaystegin de sırayla K ve R noktalarını işaretlemiş olsun. Buna göre

$$\frac{1}{2} \geq \frac{Alan(BERK)}{Alan(LMY)}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız ve eşitlik durumlarını belirleyiniz.

Problem 6. Hangi n pozitif tam sayıları için $n!$ sayısı $1^n + 2^n + ... + n^n$ sayısını böler?

Problem 7. Negatif olmayan gerçek sayıların kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ sembolüyle gösterilmek üzere, $f(f(x)) = |x-1|$ eşitliğini sağlayan bir $f\colon \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu var mıdır?

Problem 8. Gerçek sayılar kümesinin herhangi bir S sonlu alt kümesi veriliyor. Herhangi ikisi birbirine eşit olmayan $a_1, a_2, ..., a_n \in S$ sayıları seçildiğinde, $b_0 = 0$ ve her $k = 1, 2, ..., n$ için $b_k = b_{k-1} + a_k$ olmak üzere $b_k/k \geq b_n/n$ koşulu sağlanıyorsa $\{a_i\}$ dizisi, S'in içindeki bir *Levent dizisi* olarak adlandırılır.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere, S'in içindeki n elemanlı Levent dizilerinin sayısını $f(S, n)$ şeklinde gösterelim.

$$\frac{f(S,n)}{(n-1)!} \geq \binom{|S|}{n}$$

olduğunu gösteriniz. ($|S|$ sembolü S'in eleman sayısını ifade eder.)

Problem 9. $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olmak üzere her $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $\text{ebob}(f(a), f(b)) = f(\text{ebob}(a, b))$ olduğuna göre aşağıdaki önermeleri ispatlayınız.

a) Öyle bir $g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu vardır ki her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = \prod_{d|n} g(d)$ eşitliği sağlanır.

b) Böyle bir g fonksiyonu verildiğinde, herhangi $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $g(a)$ ile $g(b)$ aralarında asal değilse $a \mid b$ veya $b \mid a$ olmak zorundadır.

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.